Derivadas

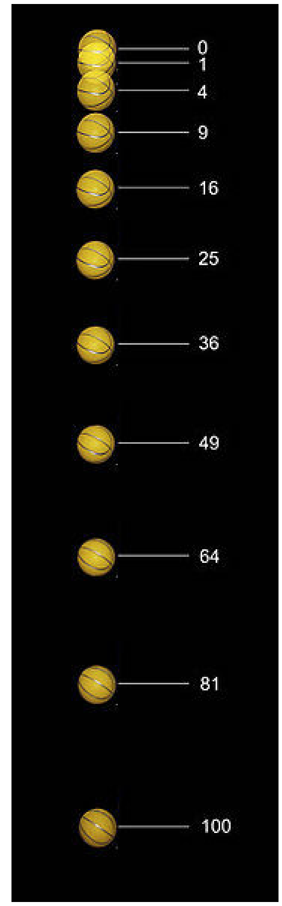


Imagen: Michael Maggs Wikipedia

Las derivadas fueron desarrolladas en el siglo XVII para resolver algunos problemas físicos, geométricos y sobre funciones, veamos 3 de los primeros usos.

1. **Velocidad**. En el siglo XVII Galileo hizo experimentos para averiguar como cambia la velocidad de los objetos que van cayendo. Los experimentos eran difíciles porque los objetos caen muy rápido y no había relojes precisos y Galileo llegó a la conclusión que la velocidad es proporcional a distancia recorrida.

Si uno deja caer un objeto desde distintas alturas y mide el tiempo que tarde en caer, entonces la velocidad promedio del objeto durante la caída es

$$\text{vel. prom} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$$

Se puede observar que la velocidad promedio de un objeto que cae no es siempre la misma sino que aumenta al aumentar la altura, así que la velocidad del objeto (que no conocemos) debe ir aumentando continuamente.
La ilustración de la derecha muestra la posición de una pelota fotografiada a intervalos de tiempo iguales: como en tiempos iguales la pelota recorre distancias cada vez mayores, su velocidad promedio va aumentando.

Con medidas y relojes precisos se puede calcular la velocidad promedio con mucha exactitud ¿pero como podemos calcular la velocidad exacta (no el promedio) en un instante t?
Si tomamos intervalos de tiempo cada vez mas pequeños alrededor de t, la velocidad promedio en esos intervalos debe acercarse cada vez mas a la velocidad exacta en el instante t, que debe ser

$$v(t) = \lim_{h\to 0} \frac{d(a+h)-d(t)}{h}$$

donde $d(t)$ es la distancia que ha recorrido el objeto hasta el instante t.

Las observaciones de Galileo lo llevaron a concluir que la distancia recorrida por un objeto en caída libre es proporcional al cuadrado del tiempo recorrido, es decir que

$d(t) = ct^2$ para una constante c , que es lo que muestra la figura, en unidades apropiadas para que c=1)

Si suponemos que esta fórmula para la distancia es válida en cada instante, entonces podemos calcular la velocidad exacta en cada instante usando límites:

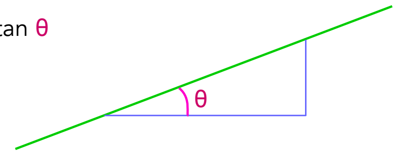
$$v(t) = \lim_{t'\to t} \frac{d(t')-d(t)}{t'-t} = \lim_{t'\to t} \frac{c(t')^2-ct^2}{t'-t} = \lim_{t'\to t} \frac{c(t'^2-t^2)}{t'-t} = \lim_{t'\to t} \frac{c(t'-t)(t'+t)}{t'-t} = \lim_{t'\to t} c(t'+t) = c\cdot 2t$$

Así que la velocidad del objeto en el instante t es $v(t) = 2ct$ y es proporcional al tiempo transcurrido y no es proporcional a la distancia recorrida, que es ct^2.

2. **Pendiente de una curva**.

Recordar que la *pendiente* de una recta es una manera de medir la inclinación de la recta respecto a una recta horizontal: se define como la tangente del ángulo que la recta forma con una recta horizontal.

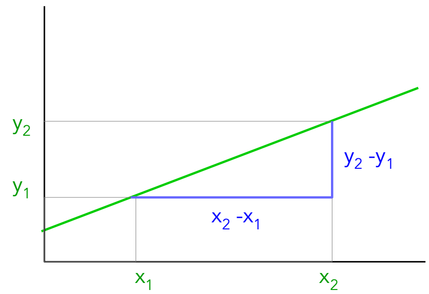
$m = \tan \theta$



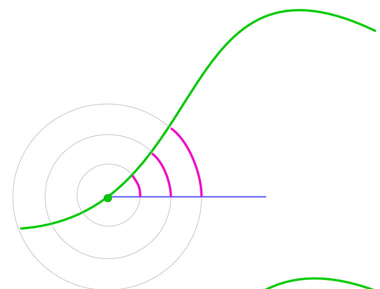
Cada recta es las gráfica de una función $f(x)=ax+b$.
Si tomamos 2 valores distintos de x, digamos x_1 y x_2
podemos calcular la pendiente a partir de la ecuación

$$m = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \frac{(ax_1+b)-(ax_2+b)}{x_1-x_2} = \frac{ax_1 - ax_2}{x_1-x_2} = a$$

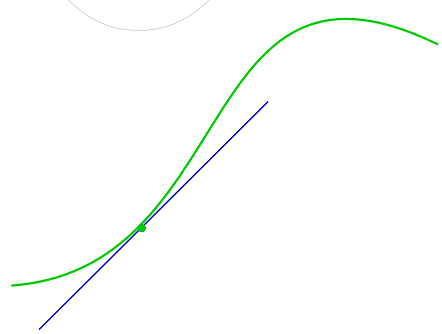
así que la pendiente de la recta con ecuación $y=ax+b$ es a.

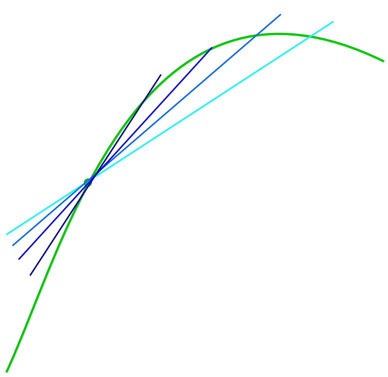


¿Y como podemos medir la inclinación de una curva?
La inclinación depende del punto, y si tratamos de medir el ángulo que forma la curva con la horizontal usando arcos de circulo los ángulos varían al cambiar el radio. Podríamos que tomar el límite de los ángulos cuando el radio tiende a 0, pero medir estos ángulos es complicado.



Es mejor pensar que la inclinación de la curva en un punto p es la inclinación de la recta tangente a la curva en p.





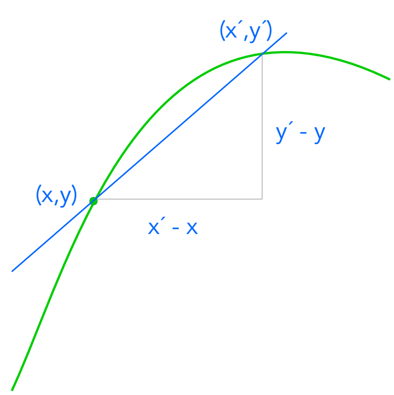
Calcular las pendientes de rectas es fácil, el problema ahora es halla la recta tangente. Una manera de hacerlo es tomar otro punto p' de la curva y tomar la recta que pasa por p y p' y buscar el límite cuando p' se tiende a p.

Si la curva está dada como la gráfica de una función $y=f(x)$ la recta que pasa por el punto (x,y) y la que pasa por el punto (x',y') tiene pendiente

$$m = \frac{y' - y}{x' - x} = \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$$

así que la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto (x,y) es

$$\lim_{x' \to x} \frac{y' - y}{x' - x} = \lim_{x' \to x} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$$



3. Crecimiento de una función.

Si consideramos una función como $f(x) = \sqrt{x}$ podemos preguntarnos que tan rápido crece f al crecer x.

x	f(x)	incremento
0	0	
		1
1	1	
		0.4142...
2	1.4142...	
		0.3178..
3	1.7205...	
		0.2779...
4	2	

así que al mismo incremento de x le corresponden incrementos muy distintos de f(x).
Cuando los incrementos de x son mas pequeños los incrementos de f(x) son mas parecidos, pero para comparar la rapidez con que crece f en distintos momentos deberiamos dividir el crecimiento de la función entre el crecimiento de x:

x	f(x)	incremento f	inc. f / inc. x
1.0	1.000000...		
		0.048808...	0.48808...
1.1	1.048808...		
		0.046636...	0.46636...
1.2	1.095445...		
		0.044730...	0.44730...
1.3	1.140175...		
		0.043040...	0.43040...
1.4	1.183215..		

Podemos medir que tan rápido está creciendo la función f cuando $x=a$ dividiendo el incremento de f entre el incremento de x y tomando el limite cuando el incremento de x tiende a 0, es decir tomando

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Para $f(x)=\sqrt{x}$ la rapidez de crecimiento cuando $x=a$ es el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$$

Derivadas.

En los 3 ejemplos anteriores obtuvimos información útil al considerar límites de la forma

$$\lim_{t'\to t} \frac{d(t') - d(t)}{t' - t} \qquad \lim_{x'\to x} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Diremos que una función f es **derivable** en un punto a de su dominio si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{existe}$$

en caso de existir, al limite se le llama la **derivada** de f en a y se le denota como $f'(a)$.

Ejemplos.

Para ver si $f(x) = x^2$ es derivable en 1, tenemos que ver si $f'(1)$ existe.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1^2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{1} = 2$$

Así que $f(x) = x^2$ sí es derivable en 1 y $f'(1)=2$.

Para ver si $f(x) = x^2$ es derivable en a (donde a es cualquier número real), tenemos que ver si $f'(a)$ existe.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{x+a}{a} = 2a$$

Así que $f(x) = x^2$ sí es derivable para cada número real a y $f'(a)=a$.

En la definición de derivada podemos llamar al punto que se aproxima a a como queramos, por ejemplo

$$f'(a) = \lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a} \qquad \textit{(si el límite existe)}$$

o podemos escribir $x=a+h$, donde h es un número (positivo o negativo) que se aproxima a 0, y entonces la definición queda

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad \textit{(si el límite existe)}$$

que equivale a la definición original, con otros nombres, pero que a veces es mas conveniente.
Si una función $f(x)$ es derivable en todos o en casi todos los puntos de su dominio, queramos pensar en su derivada como una *función* a la que llamaremos $f'(x)$. Para definir $f'(x)$ tenemos que pensar por un momento que el punto x está fijo y darle otro nombre al punto que se le acerca, por ejemplo poniendo x en lugar de a en la definición anterior queda

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \textit{(si el límite existe)}$$

Ejemplo. Para $f(x) = x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$$

Así que a derivada de la función $f(x) = x$ es la función constante $f'(x) = 1$

Ejemplo. Para $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2x+h = 2x$$

Así que a derivada de la función $f(x) = x^2$ es la función $f'(x) = 2x$

Ejemplo. Para $f(x) = \sqrt{x}$ (definida para $x\geq 0$)

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h\,(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} \quad \text{si } x\neq 0$$

y si $x=0$ la derivada no existe, porque el límite (por la derecha) es ∞.

Ejercicio. Para $f(x) = 1/x$ (definida para $x\neq 0$) calcula $f'(x)$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1/(x+h) - 1/x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x/x(x+h) - (x+h)/(x+h)x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h/x(x+h)}{h} = -1/x$$

Para calcular lasderivadas de funciones mas complicadas no bastan los trucos algebraicos y hay que pensar con mas cuidado.

Ejemplo. Para hallar la derivada de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ necesitamos calcular $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}(x)}{h}$
Como en todos los cálculos de derivadas el numerador y el denominador se aproximan a 0, y tenemos que hacer algo para deshacernos de la indefinición. En este caso los trucos anteriores no sirven, pero podemos usar la fórmula $\operatorname{sen}(x+h) = \operatorname{sen}(x)\cos(h) + \operatorname{sen}(h)\cos(x)$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(h) + \operatorname{sen}(h)\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)\cos(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(h)-\operatorname{sen}(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} \cos(x) + \lim_{h\to 0} \operatorname{sen}(x) \frac{\cos(h)-1}{h} = 1\cdot\cos(x) + 0\cdot\operatorname{sen}(x) = \cos(x) .$$

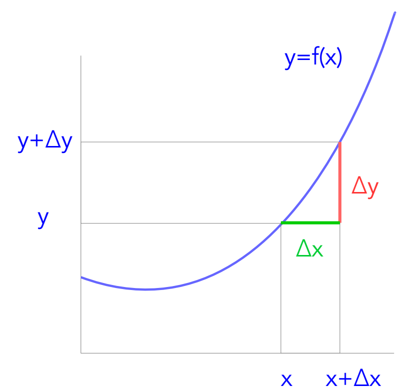
Ejercicio. Hallar la derivada de $g(x) = \cos(x)$

R: $g'(x) = -\operatorname{sen}(x)$

Hay otras maneras de escribir a la derivada de una función $y=f(x)$ que a veces son mas convenientes. La derivada de f es

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

donde h es el cambio de la variable x y $f(x+h)-f(x)$ es el cambio de la función f .



pero si escribimos al cambio en la variable x como Δx y al cambio en la función f como Δf entonces la derivada de f en x se puede escribir como

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

y si escribimos al cambio de la variable y como Δy entonces la derivada de y vista como función de x es

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ejemplo. Si $y = \operatorname{sen}(x)$ entonces

$$y' = \frac{d \operatorname{sen}(x)}{dx} = \cos(x)$$

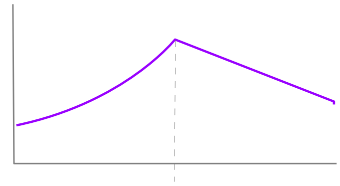
Es posible calcular derivadas de funciones mas complicadas de la misma manera, pero es mas fácil hacerlas si entendemos las propiedades de la derivación y su relación con las operaciones aritméticas.
Lo primero que hay que entender es la relación entre las funciones continuas y las funciones derivables.

Lema. Si una función f es derivable en un punto a entonces f es continua en a.

Demostración. La función f es continua en un punto a si $\lim_{h\to 0} f(a+h)-f(a) = 0$.
Si f es derivable en a entonces $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$

Así que $\lim_{h\to 0} f(a+h)-f(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \cdot h = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h = f'(a) \cdot 0 = 0$

Al revés no es cierto: hay muchas funciones continuas en un punto a que no son derivables en a: las funciones continuas cuyas gráficas tienen un pico en a no son derivables en a.



Lema. Si f y g son funciones derivables en a, entonces $f+g$ es derivable en a y $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$.

Demostración. Como $\dfrac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} = \dfrac{f(x+h)+ g(x+h)-f(x)'g(x)}{h} = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} + \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$

entonces $\lim_{h\to 0} \dfrac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$ •

Ejemplo. La derivada de $h(x) = \operatorname{sen}(x) + \cos(x)$ es $h'(x) = \cos(x) - \operatorname{sen}(x)$.

La derivada del producto $f\cdot g$ *no* es el producto de las derivadas de f y g: por ejemplo, si tomamos $f(x)=g(x)=x$ entonces $f\cdot g(x)=x^2$ así que $(f\cdot g)'=2x$ pero $f'(x)\cdot g'(x) = 1\cdot 1 \neq 2x$.

Teorema. Si f y g son funciones derivables en a, entonces $f\cdot g$ es derivable en a y $(fg)'(a)=f'(a)g(a)++g'(a)f(a)$

Demostración. Como $\dfrac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)}{h} = \dfrac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h} = \dfrac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x+h)\cdot g(x) + f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x)}{h}$

Entonces $\lim_{h\to 0} \dfrac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)\cdot[g(x+h)-g(x)]}{h} + \lim_{h\to 0} \dfrac{[f(x+h)-f(x)]\cdot g(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} g(x)$$

$$= f(x) \cdot g'(x) + f(x) \cdot g'(x)$$ •

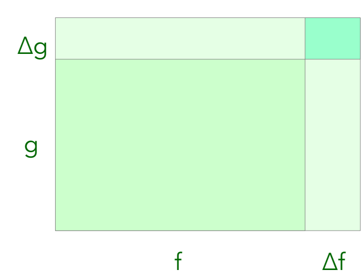
La derivada del producto se entiende mejor usando la notación $\dfrac{dh}{dx} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\Delta h}{\Delta x}$

Si $h = f\cdot g$ entonces $\Delta h = (f+\Delta f)\cdot(g+\Delta g) - (f\cdot g) = \Delta f\cdot g+f\cdot\Delta g+ \Delta f\cdot\Delta g$

Así que $\dfrac{dh}{dx} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\Delta h}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\Delta f\cdot g + f\cdot\Delta g + \Delta f\cdot\Delta g}{\Delta x} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\Delta f\cdot}{\Delta x} g + f \frac{\Delta g}{\Delta x} + \frac{\Delta f}{\Delta x} \Delta g$$

$$= \frac{df\cdot}{dx} g + \frac{dg}{dx} f + \frac{df}{dx} 0$$



Ejemplo. ¿Cual es la derivada de la función $f_n(x)=x^n$?

Ya habíamos calculado a pie que la derivada de $f_1(x)=x$ es la función constante $f_1'(x)=1$

También calculamos a pie la derivada de $f_2(x)=x^2$ pero podemos hacerlo usando la regla del producto:

Como $f_2(x)= f_1(x)\cdot f_1(x)$ entonces $f_2'(x)= f_1'(x)\, f_1(x) + f_1'(x)\, f_1(x) = 1\cdot x +1\cdot x = 2x$

Para calcular la derivada de $f_3(x)=x^3$ podemos escribir $f_3(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$ entonces $f_3'(x)= f_1'(x)\, f_2(x)+f_2'(x)\, f_1(x) = 1\cdot x^2+2x\cdot x = 3x^2$

Para calcular la derivada de $f_4(x)=x^4$ podemos escribir $f_4(x)=f_1(x)\cdot f_3(x)$ entonces $f_4'(x)= f_1'(x)\, f_3(x)+f_3'(x)\, f_1(x) = 1\cdot x^3+3x^2\cdot x = 4x^3$

Y si ya calculamos la derivada de $f_n(x)=x^n$ es $f_n'(x)=nx^{n-1}$ entonces podemos calcular la derivada de la siguiente potencia $f_{n+1}(x)=x^{n+1}$ escribiendo $f_{n+1}(x)=f_1(x)\cdot f_n(x)$ entonces $f_{n+1}'(x)= f_1'(x)\, f_n(x)+f_n'(x)\, f_1(x) = 1\cdot x^n+nx^{n-1}\cdot x = (n+1)x^n$

Ejemplo. ¿Cual es la derivada de $h(x) = x^2 sen(x)$?

Si hacemos $f(x)=x^2$ y $g(x)=sen(x)$ entonces $h(x)=f(x)g(x)$ así que $h´(x) = f´(x)g(x)+g´(x)f(x) = 2x\cdot sen(x)+cos(x)\cdot x^2$

La derivada de la función $(1/g)(x)$ *no* es $1/g´(x)$: si tomamos por ejemplo $g(x)=x$ entonces $(1/g)(x)=1/x$ y $(1/g)´(x)=-1/x^2$ pero $1/g´(x)=1/1=1$.

Lema. Si g es derivable en a y $g(a)\neq 0$ entonces $1/g$ es derivable en a y $(1/g)´(a) = -\dfrac{g´(a)}{g^2(a)}$

Demostración.

$$\lim_{h\to 0}\frac{1/g(x+h)-1/g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[g(x)-g(x+h)]/\cdot g(x)g(x+h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[g(x)-g(x+h)]}{h}\cdot \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x)g(x+h)} = -g´(x)\cdot\frac{1}{g(x)g(x)} \quad \bullet$$

Ejemplo. ¿Cual es la derivada de la función $f(x) = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$

Si hacemos $g(x)=x^n$ entonces $f(x)=(1/g)(x)$ y por el lema $g`(x) = -\dfrac{g´(x)}{g^2(x)} = -\dfrac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -n\, x^{-n-1}$

Ejemplo. ¿Cual es la derivada de $sec(x)$?

$sec(x) = \dfrac{1}{cos(x)}$ así que la derivada de $sec(x)$ es $-\dfrac{-sen(x)}{cos^2(x)} = tan(x)sec(x)$

Corolario. Si f y g son derivables en a y $g(a)\neq 0$, entonces f/g es derivable en a y $(f/g)´(a) = \dfrac{f´(a)g(a) - g´(a)f(a)}{g^2(a)}$

Demostración. Por el lema anterior $1/g$ es derivable en a y por el teorema anterior $f\cdot 1/g$ es derivable en a y

$$(f\cdot 1/g)´(a) = f´(a)\cdot(1/g)(a) + (1/g)´(a)\cdot f´(a) = \frac{f´(a)}{g(a)} - \frac{g´(a)}{g^2(a)}f(a) = \frac{f´(a)g(a)-g´(a)f(a)}{g^2(a)} \quad \bullet$$

Ejemplo. ¿Cual es la derivada de la función $h(x) = \dfrac{x^3+2x^2-3x}{x^2+4x+1}$?

$$h´(x) = \frac{(3x^2+2x-3)(x^2+4x+1)-(2x+4)(x^3+2x^2-3x)}{(x^2+4x+1)^2}$$

Ejemplo. ¿Cual es la derivada de la función $tan(x)$?

$tan(x) = \dfrac{sen(x)}{cos(x)}$ así que la derivada $tan(x)$ es $\dfrac{cos(x)cos(x)-(sen(x))sen(x)}{cos^2(x)} = \dfrac{cos^2(x)+sen^2(x)}{cos^2(x)} = \dfrac{1}{cos^2(x)} = sec^2(x)$

Ejercicio. Calcular la derivada de $cot(x)$.

R: $-sec^2(x)$

¿Y como serán las derivadas de las composiciones de funciones? ¿Se podrán calcular a partir de las derivadas de las funciones?

Teorema. (Regla de la cadena) Si f es derivable en a y g es derivable en $f(a)$, entonces $g\circ f$ es derivable en a y $(g\circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

Demostración. Con un poco de trampa*

$$\lim_{h\to 0} \frac{g\circ f(a+h)-g\circ f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(f(a+h))-g(f(a))}{h}\ \frac{f(a+h)-f(a)}{f(a+h)-f(a)} = \lim_{h\to 0} \frac{g(f(a+h))-g(f(a))}{f(a+h)-f(x)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

este límite es $g'(f(a))$ ya que f es continua en a, así que si h se acerca a 0 entonces $f(a+h)$ se aproxima a $f(a)$.

Y la trampa en la demostración es que tenemos que suponer que $f(a+h)\neq f(a)$ para no dividir entre 0. •

Ejemplo. ¿Cual es la derivada de la función $h(x) = (x^5+2x^3-3x+4)^{10}$?

Si $f(x) = x^5+2x^3-3x+4$ y $g(x) = x^{10}$ entonces $h(x) = g\circ h(x)$

así que por la regla de la cadena $h'(x) = 10(x^5+2x^3-3x+4)^9 \cdot (5x^4+6x^2-3)$

Ejemplo. ¿Cual es la derivada de la función $s(x) = \mathrm{sen}(x^2)$? ¿ y la derivada de la función $t(x) = \mathrm{sen}^2(x)$?

$s'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$

$t'(x) = 2\mathrm{sen}(x) \cdot \cos(x)$

Ejercicio. ¿Cuales son las derivadas de estas funciones?

$e(x) = (x^3+2x^2+3x)^4(x^2-1)^5$ — $e'(x) = 4(x^3+2x^2+3x)^3(3x^2+4x+3)(x^2-1)^5+(x^3+2x^2+3x)^4\cdot 5(x^2-1)^5\cdot 2x$

$b(x) = \mathrm{sen}(2x^3-3x+4)$ — $b'(x) = (6x-3)\cos(2x^3-3x+4)$

$c(x) = \cos^3(x) - \mathrm{sen}^2(x) + \cos^{-1}(x)$ — $c(x) = -3\cos^2(x)\mathrm{sen}(x) - 2\mathrm{sen}(x)\cos(x) + \cos^{-2}(x)\mathrm{sen}(x)$

$d(x) = \mathrm{sen}(\cos(x))$ — $d'(x) = \cos(\cos(x))\,(-\mathrm{sen}(x))$

Para las composiciones de varias funciones hay que aplicar la regla de la cadena repetidamente.

Ejemplo. La derivada de la función $s(x) = \mathrm{sen}^3(x^2)$ es $s'(x) = 3\mathrm{sen}^2(x^2) \cdot \cos(x^2) \cdot 2x$

Ejercicio. Hallar las derivadas de estas funciones

$e(x) = \mathrm{sen}(\mathrm{sen}(\mathrm{sen}(x)))$

$f(x) = \mathrm{sen}(x^2+3x+5)^7$

$g(x) = \cos^3(\mathrm{sen}^5(x))$

$h(x) = \cos(1/(\mathrm{sen}(1/x))$

Teorema. Si una función invertible $y=f(x)$ es derivable en a y $f'(a)\neq 0$ entonces su inversa f^{-1} es derivable en $f(a)$ y la derivada es $(f^{-1})'(f(a)) = 1/f'(a)$.

Demostración. Si g es la inversa de f, $g\circ f(x)=x$ entonces $(g\circ f)'(x)=1$ y por la regla de la cadena $1= (g\circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$ así que $g'(f(a)) = 1/f'(a)$. •

Con la notación de Leibniz el resultado anterior se ve así: $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$

Ejemplo. ¿Cual es la derivada de la función $r(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$?

La función $r(x) = x^{1/n}$, definida para todos los reales si n es impar y para los reales no negativos si n es par, es la inversa de $g(x)=x^n$ así que $g\circ f(x)=x$ y por lo tanto $(g\circ f(x))'=1$. Pero por la regla de la cadena $g'(f(x))\cdot f'(x) = (g\circ f(x))'=1$ así que

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{n(x^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{nx^{n-1/n}} = {}^1/_n\, x^{1-n/n} = {}^1/_n\, x^{1/n-1}$$

Ejercicio. Calcula la derivada de la función $r(x) = x^{m/n}$

R: $r'(x) = {}^{m}/_{n}\, x^{m/n\,-1}$

La regla para la derivada de la inversa puede usarse para calcular fácilmente las derivadas de las funciones trigonométricas inversas.

Ejemplo. Si $y = \text{arcsen}(x)$ entonces $x = \text{sen}(y)$

así que $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{1\text{-sen}^2(y)} = \frac{1}{\sqrt{1\text{-}x^2}}$$

Ejemplo. Si $y = \arctan(x)$ entonces $x = \tan(y)$

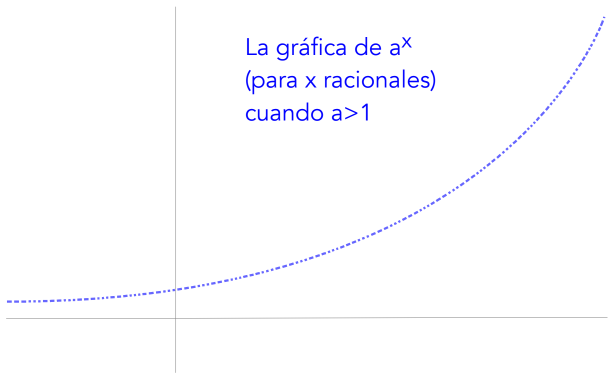
así que $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sec^2(y)} = \frac{1}{\tan^2(y)+1} = \frac{1}{1+x^2}$$

Ejemplo. Calcula la derivada de $\text{arcsec}(x)$

R:

Derivadas de las funciones exponenciales y logarítmicas

Aún no hemos definido bien las funciones exponenciales a^x (solo lo hicimos para valores racionales de x, como $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ y para valores irracionales de x definimos $a^{m/n} = \lim_{m/n\to x} a^{m/n}$ sin demostrar que estos límites realmente existen). Pero al dibujar las gráficas de las funciones exponenciales para valores racionales si parece que los límites existen, que las gráficas no tienen saltos y tienen una tangente bien definida en cada punto.



No podremos estar seguros de esto hasta aprender mas cosas, pero si creemos que las funciones exponenciales están bien definidas, que son continuas y que satisfacen las leyes de los exponentes $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ para todos los valores reales de x y y entonces podemos adivinar cuales son sus derivadas.

La derivada de a^x (suponiendo que existe) es

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h}\text{-}a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x\, a^h\text{-}a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x\,(e^h\text{-}1)}{h} = a^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^h\text{-}1}{h}$$

así que para calcular la derivada de a^x necesitamos calcular $\lim_{h\to 0} \frac{a^h\text{-}1}{h}$

Para $a = e$ se puede mostrar que $\lim_{h\to 0} \frac{e^h\text{-}1}{h} = 1$ (esto dice que la derivada de e^x en 1 es 1)y por lo anterior esto implica que $\frac{d}{dx} e^x = e^x$ así que la derivada de la función e^x es la misma función!

Para otros valores de a, $a=e^{\log_e a}$ y por lo tanto $a^x = e^{\log_e a\, x}$
así que por la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{\log_e a\, x} = e^{\log_e a\, x} \log_e a = a^x \log_e a$$

(y de aquí sale que $\lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h} = \log_e a$)

Si ya tenemos a las funciones exponenciales definidas, podemos definir las funciones logarítmicas $\log_a(x)$ como las inversas de las funciones a^x (suponiendo que tienen inversas, algo que parece cierto al ver las gráficas). Si la derivada de la función e^x es la misma función e^x entonces podemos calcular la derivada de $\log_e(x)$ como función inversa de e^x.

Si $y = \log_e(x)$ entonces $x = e^y$ así que $dy/dx = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$

Ejemplos.

Si $f(x) = xe^x \rightarrow f'(x) = e^x+xe^x$ (regla del producto)

Si $g(x) = e^{\text{sen}(x)} \rightarrow g'(x) = \cos(x)e^{\text{sen}(x)}$ (regla de la cadena)

Si $h(x) = \text{sen}(e^x) \rightarrow h'(x) = e^x\cdot\cos(e^x)\cdot$

Si $i(x) = \log_e(x^2) \rightarrow i'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$

Si $j(x) = \log_e(\text{sen}(x)) \rightarrow j'(x) = \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)} = \cot(x)$

Ejercicios. Calcular las derivadas de las siguientes funciones

$k(x) = e^{2x}+ e^{-x}$	$k'(x) = 2e^{2x}- e^{-x}$
$l(x) = e^{x^2}$	$l'(x) = 2x\cdot e^{x^2}$
$m(x) = \log_e(\cos(x))$	$m'(x) = -\tan(x)$
$n(x) = \log_e(\log_e(x))$	$n(x) = \frac{1}{x\cdot\log_e(x)}$
$o(x) = e^x\log_e(x)$	$o'(x) = e^x \log_e(x) + {}^1/_x e^x$
$p(x) = e^{x\log_e(x)}$	$p'(x) = (\log_e(x)+1)\, e^{x\log_e(x)}$

Problemas

1. Calcula las derivadas de las siguientes funciones a partir de la definición

   a. $f(x) = x|x|$ b. $g(x) = \cos(x)$ c. $h(x) = \sqrt[3]{x}$

2. Calcula las siguientes derivadas usando las relaciones entre la derivación y las operaciones aritméticas

   $a(x) = x^3+x^2+x+1+x^{-1}+x^{-2}+ x^{-3}$ $b(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

   $c(x) = \frac{x^n-1}{x-1}$ $d(x) = \text{sen}(x)\cos(x)$

$e(x) = \dfrac{1}{sen(x)\cos(x)}$ $f(x) = \csc(x)$

$g(x) = \dfrac{x^2}{\cos(x)}$ $h(x) = \arccos(x)$

$i(x) = \operatorname{arccsc}(x)$ $j(x) = e^x\, sen(x)$

$k(x) = x \log_e(x)$ $l(x) = \dfrac{\log_e(x)}{x}$

3. Calcula las siguientes derivadas usando la regla de la cadena

$a(x) = (x^3+2x^{-1}-3)^5$ $b(x) = sen^2(x) + \cos^2(x)$

$c(x) = \cos(1/x)$ $d(x) = sen(x)\, sen(2x)\, sen(3x)$

$e(x) = sen^2(\cos^3(x))$ $f(x) = e^{-1/x}$

$g(x) = \log_e(x^3+x^2+x)$ $h(x) = \dfrac{sen^2(x)}{x^3}$

¿Que miden las derivadas?

La derivada de una función en un punto a mide que tan rápido crece la función cerca de a

Si una función f es derivable en a entonces $f'(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ así que para valores pequeños de h,

$f'(a) \approx \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ y por lo tanto $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)\cdot h$

así que podemos usar la derivada para estimar los valores de la función en puntos cercanos a a.

Ejemplo. Si $f(x) = \sqrt{x}$ entonces $f'(x) = {}^1/_{2\sqrt{x}}$

Como $f(1) = 1$ y $f'(1) = {}^1/_2$ entonces podemos estimar los valores de f para valores cercanos a 1 como

$\sqrt{1+h} = f(1+h) \approx f(1) + f'(1)\cdot h = 1+{}^1/_2 h$ asi que por ejemplo

$\sqrt{1.1} = 1 + {}^1/_2(0.1) = 1.05$

$\sqrt{0.9} = 1 + {}^1/_2(-0.1) = 0.95$

Como $f(100) = 10$ y $f'(1) = {}^1/_{20}$ entonces podemos estimar los valores de f para valores cercanos a 100 como

$\sqrt{100+h} = f(100+h) \approx f(100) + f'(100)\, h = 1+{}^1/_{20}\, h$ asi que por ejemplo

$\sqrt{102} = 10 + {}^1/_{20}(2) = 10.1$

$\sqrt{100.1} = 10 + {}^1/_{20}(0.1) = 10.005$

$\sqrt{99} = 1 + {}^1/_{20}(-1) = 9.05$

Ejercicio. Da una fórmula aproximada para los valores de ${}^1/_x$ cuando x está cerca de a.

Si $f(x) = {}^1/_x$ entonces $f'(x) = -{}^1/_{x^2}$ así que ${}^1/_{a+h} = {}^1/_a - {}^1/_{a^2}\, h$

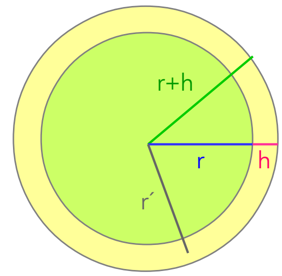
por ejemplo ${}^1/_{1+h} = {}^1/_1 - {}^1/_1\, h = 1 - h$

${}^1/_{2+h} = {}^1/_2 - {}^1/_4\, h$

${}^1/_{10+h} = {}^1/_{10} - {}^1/_{100}\, h$

Ejemplo. El área de una circunferencia de radio r es $a(r)=\pi r^2$ y su circunferencia es $c(r)=2\pi r$

Observar que $a'(r) = 2\pi r = c(r)$. Esto no es casualidad: $a'(r) = \lim_{h\to 0} \dfrac{a(r+h) - a(r)}{h}$



donde $a(r+h) - a(r)$ es el área del anillo que queda entre la circunferencia de radio r y la circunferencia de radio $r+h$, y el ancho del anillo es h, así que el área del anillo debe ser h multiplicado por la circunferencia de un circulo de radio entre r y $r+h$, por lo que $\dfrac{a(r+h) - a(r)}{h}$ debe ser igual a $c(r')$ para algún $r<r'<r+h$ así que el límite es $c(r)$.

Ejercicio. El volumen de una esfera de radio r es $v(r)={}^4/_3\pi r^3$ y su superficie es $s(r)=4\pi r^2$

¿puedes explicar por que $v'(r) = 4\pi r^2 = s(r)$?

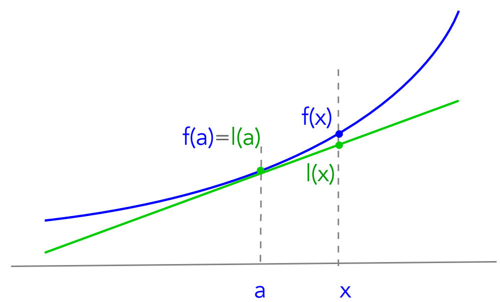
Ejercicio. Si el radio de la tierra creciera 1 metro

¿como cuantos metros aumentaría su circunferencia?

¿como cuantos metros cuadrados aumentaría su superficie?

¿como cuantos metros cúbicos aumentaría su volumen?

Teorema. Si la función $f(x)$ es derivable en un punto a entonces la mejor aproximación lineal de $f(x)$ para valores de x cercanos a a está dada por la función $l(x) = f(a)+f'(a)(x-a)$.



Esta aproximación lineal es la que usamos en los ejemplos anteriores y puede usarse para cualquier función derivable. Observar que $l(x)$ da la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x=a$.

Demostración. Como $f(x)$ y $l(x)$ son continuas en a y toman el mismo valor en ese punto entonces cuando x se aproxima a a la diferencia $f(x)-l(x)$ se aproxima a 0, es decir $\lim_{x\to a} f(x)-l(x) = 0$. Pero lo que hace especial a $l(x)$ es que esa diferencia dividida entre $x-a$ se aproxima a 0, es decir que $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-l(x)}{x-a} = 0$ y no hay ninguna otra función lineal con esa propiedad.

Para probar esto observar que $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-l(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - \lim_{x\to a} \dfrac{f'(a)(x-a)}{x-a} =f'(a)-f'(a)=0$

Y si en lugar de tomar la función lineal $l(x) = f(a)+f'(a)(x-a)$ tomamos otra función lineal, digamos $m(x) = b+c(x-a)$ entonces $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-m(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-b-c(x-a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-b}{x-a} - \lim_{x\to a} \dfrac{c(x-a)}{x-a}$

pero si $b\neq f(a)$ el primer límite no existe y el segundo límite es c, así que el límite de la diferencia no existe. Y si $b=f(a)$ el primer límite es $f'(a)$ y el segundo límite es c, así que si $c\neq f'(a)$ el limite de la diferencia no es 0. •

Ejemplo. ¿Cual es la mejor aproximación lineal a la función $f(x) = x^3-3x^2+5x+7$ en el punto $a=2$?

Como $f(2) = 2^3-3\cdot 2^2+5\cdot 2+7 = 13$ y $f'(2) = 3\cdot 2^2-6\cdot 2+5 = 5$ entonces $l(x) = 13+5(x-2) = 3+5x$

Ejemplo. ¿Cual es la mejor aproximación lineal a la función $f(x) = \cos(x)$ en $a={}^{\pi}/_{3}$?

Como $f({}^{\pi}/_{3}) = \cos({}^{\pi}/_{3}) = {}^{1}/_{2}$ y $f'({}^{\pi}/_{3}) = -\mathrm{sen}({}^{\pi}/_{3}) = -{}^{\sqrt{3}}/_{2}$ entonces $l(x) = {}^{1}/_{2} -{}^{\sqrt{3}}/_{2}(x-{}^{\pi}/_{3}) = -{}^{\pi}/_{3}x +({}^{1}/_{2}+{}^{\pi}/_{3})$

Problemas.

4. Aproxima estos números usando derivadas (sin usar calculadora)
   a. $(10.2)^3$
   b. $(10.01)^{10}$
   c. $\sqrt{0.9}$
   d. $\sqrt[3]{1003}$

5. Si la función f es derivable en el intervalo $[2,7]$, $f(2)=3$ y $4\leq f'(x)\leq 5$ para todo x del intervalo ¿cuales son los valores mas chicos y mas grandes posibles para $f(7)$?

6. Da la función lineal que aproxima mejor a la función dada en los puntos dados
   a. $f(x)=x^3$ $a=3$ $a=1/2$
   b. $f(x)=\sqrt[3]{x}$ $a=8$ $a=1000$

Algunos resultados sobre funciones derivables.

Decimos que una función $f(x)$ tiene un **máximo local** en un punto c si para todos los x en una vecindad de c se cumple que $f(x) \leq f(c)$. Analogamente, decimos que $f(x)$ tiene un tiene un un **mínimo local** en c si para todos los x en una vecindad de c se cumple que $f(c) \leq f(x)$.

Lema. Si una función f es derivable en el intervalo $[a,b]$ y f tiene un máximo o un mínimo local en un punto c del interior del intervalo entonces $f'(c)=0$.

Demostración. Si f tiene un máximo en c, $f(c) \geq f(c+h)$ así que $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$ para $h>0$ y $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$ para $h<0$.
Así que $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$ para $h>0$ y $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$
pero si $f'(c)$ existe ambos limite deben ser iguales, así que $f'(c)= 0$. •

Ejemplo. ¿Cual será el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x) = x^3-2x^2-3x+4$ en el intervalo $[-1,2]$?
La función $f(x) = x^3-2x^2-3x+4$ es derivable en el intervalo $[-1,2]$ y por lo tanto es continua en el intervalo, así que debe alcanzar un valor máximo y un valor mínimo en ese intervalo.

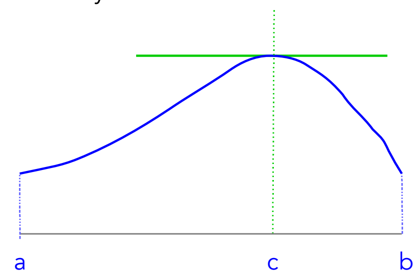
x	f(x)
-1	4
0	4
1	0
2	-1

Si tabulamos algunos valores de f en el intervalo vemos que el valor máximo es por lo menos 4 y el valor mínimo es a lo mas -1, pero los valores máximos y mínimos pueden estar en otros puntos. Tenemos que buscarlos en los puntos donde $f'(x)=0$.

$f'(x) = 3x^2-4x-3$ cuyas raíces son

$$x=\frac{4 \pm\sqrt{4^2-4\cdot 3\cdot(-3)}}{2\cdot 3} = \frac{4 \pm\sqrt{52}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{13}}{3} \approx 1.868\ ,\ -0.535$$

Como $f(-0.535)\approx 4.879$ y $f(1.868)\approx -2.064$ el valor máximo de f es ≈ 4.879 y el valor mínimo es ≈ -2.064

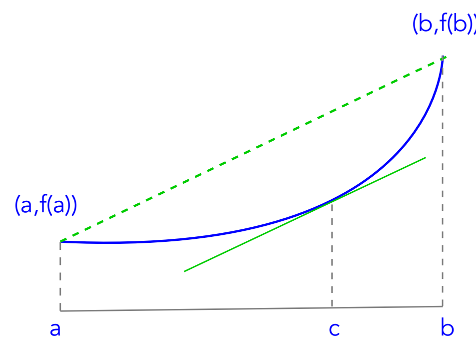


Teorema de Rolle. Si una función f es derivable en el intervalo [a,b] y $f(a)=f(b)$ entonces existe un c en el intervalo donde $f'(c)=0$

Demostración. Como f es derivable en el intervalo entonces f es continua en el intervalo y por lo tanto tiene un valor máximo y un valor mínimo en el intervalo.

Si $f(x)$ es constante entonces $f'(x)=0$ para todos los puntos del intervalo. Si no es constante entonces f toma otros valores ademas de $f(a)=f(b)$ así que f debe alcanzar su valor máximo o su valor mínimo en el interior del intervalo, y por el lema anterior la derivada de f en ese punto es 0. •

Ejemplo. La función $f(x) = x^4-x^3+x^2-x+1$ es derivable en el intervalo [0,1] y $f(0)=f(1)$ así que debe haber un c entre 0 y 1 tal que $f'(c)= 4x^3-3x^2+2x-1$ vale 0 (para hallar c habría que encontrar las raíces de este polinomio).



Teorema del valor medio. Si una función f es derivable en el intervalo [a,b] y entonces existe un c en el intervalo donde $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

El número $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es la pendiente de la recta que pasa por los puntos (a,f(a)) y (b,f(b)) y mide la velocidad promedio a la que crece f en el intervalo [a,b]. El Teorema de Rolle dice que hay la menos un momento en que la función f crece exactamente a esa velocidad (o sea que la tangente a la curva tiene la misma inclinación que la recta entre (a,f(a)) y (b,f(b)).

Demostración. Considerar la función $h(x) = f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x-a)$ cuya gráfica es la recta por (a,f(a)) y (b,f(b)).
Entonces $f(x)-h(x)$ es derivable en el intervalo [a,b] y vale 0 en a y en b, así que por el Teorema La de Rolle existe un punto c del intervalo donde $f'(x)-h'(x) = 0$ así que $f'(x) = h'(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. •

Ejemplo. La función $f(x) = x^4-x^3+x^2-x+1$ es derivable en el intervalo [0,2] y $f(0)=1$ y $f(2)=11$ así que debe haber un c entre 0 y 2 donde $f'(c)= 4x^3-3x^2+2x-1$ vale $^{11}/_{2}$.

Corolario. Si una función f es derivable en un intervalo y $f'(x)=0$ para todo x del intervalo, entonces f es una función constante.

Demostración. Por contradicción. Si f no fuera constante entonces existirian dos puntos a y b del intervalo tales que $f(a)\neq f(b)$. Pero entonces el teorema del valor medio diría que hay un punto c en el intervalo $[a,b]$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \neq 0$, contradiciendo que $f'(x)=0$ en todos los puntos del intervalo. •

Ejemplo. La derivada de la función $f(x)=sen^2(x)+cos^2(x)$ es $f'(x)=2sen(x)cos(x)+2cos(x)(-sen(x)) = 0$ así que $sen^2(x)+cos^2(x)$ es una función constante.

Dos funciones pueden tener las mismas derivadas sin ser iguales, ya que si a una función le sumamos cualquier constante su derivada no cambia. ¿pero podrán haber funciones que no difieran por una constate y tengan las mismas derivadas?

Corolario. Si dos funciones tienen las mismas derivada en un intervalo, entonces las funciones difieren por una constante.

Demostración. Si f y g tienen derivadas iguales entonces la derivada de $f-g$ es 0, así que por el resultado anterior $f-g$ es una constante. •

Ejemplo. Las derivadas de $\log_e(x)$ y $\log_e(2x)$ son ambas $1/x$. Esto se explica porque $\log_e(2x) = \log_e(x) + \log_e(2)$

Recordar que una función f es ***creciente*** si $f(x)<f(x')$ para toda $x<x'$ y f es ***decreciente*** si $f(x)>f(x')$ para toda $x<x'$.

Corolario. Si una función f es derivable en un intervalo y $f'(x)>0$ en ese intervalo entonces f es creciente.

Demostración. Por contradicción. Si f no fuera creciente entonces habrian dos puntos a y x´en el intervalo tales que $a<b$ y $f(a)\geq f(b)$. Entonces por el teorema del valor medio existiría un punto c entre a y b tal que $f'(c)= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ pero $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq 0$ así que $f'(c)\leq 0$ la que contradice que $f'(x)>0$ para todos los puntos del intervalo. •

Ejemplos. La derivada de $f(x)=x^3-3x$ es $f'(x)=3x^2-3$ que es mayor que 0 si $x>1$ así que f es creciente en el intervalo $[1,\infty)$.
La derivada de $f(x)=x^3-3x^2+3x$ es $f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2\geq 0$ así que $f(x)=x^3-3x^2+3x$ es *no decreciente* en el intervalo $(-\infty,\infty)$.

Problemas.

7. Encuentra todos los valores de c que satisfacen la conclusión del Teorema de Rolle para la función $f(x)=x^3+x^2-2x$ en el intervalo $[-2,1]$.

8. Encuentra todos los valores de c que satisfacen la conclusión del Teorema del valor medio para la función $f(x)=4x^3-8x^2+7x-2$ en el intervalo $[2,5]$.

9. Si la función f es derivable en el intervalo $[1,5]$, $f(2)=6$ y $f(5)=4$
   a. ¿Cuales valores puede tomar $f(x)$ en los puntos del intervalo?
   b. ¿Cuales valores debe debe tomar forzosamente $f(x)$ en el intervalo?
   c. ¿Cuales valores puede tomar $f'(x)$ en los puntos del intervalo?
   d. ¿Cuales valores debe debe tomar forzosamente $f'(x)$?

10. ¿En que intervalos son crecientes las siguientes funciones? ¿En que intervalos son decrecientes?
    a. $f(x)=x^3-3x^2-9x+4$
    b. $g(x)=sen(x)+cos(x)$
    c. $h(x)=e^x+e^{-x}$

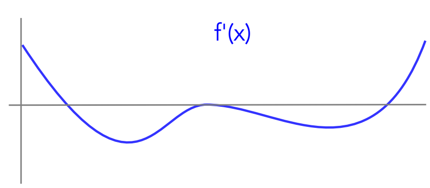
11. Encuentra los valores máximo y mínimo de las funciones dadas en los intervalos indicados (ojo: pueden ocurrir en los extremos de los intervalos)
    a. $f(x)=x^4-2x^2+1$ en el intervalo $[-2,1]$.
    b. $f(x)=x+2/x$ en el intervalo $[1/2,2]$.
    c. $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ en el intervalo $(-\infty,\infty)$.
    d. $f(x)=sen(x)+cos(x)$ en el intervalo $[0,\pi]$.

12. Demuestra que la suma de cualquier número real y su reciproco es por lo menos 2.

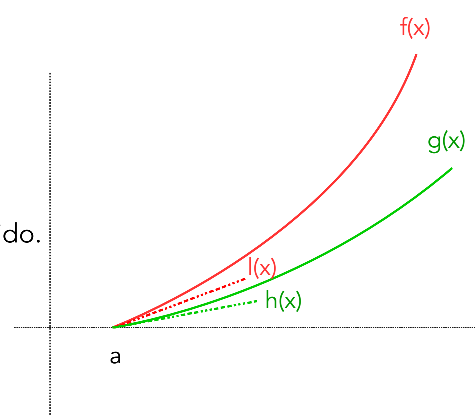
13. Encuentra el rectángulo mas grande que se puede inscribir en un semicírculo.

14. Demuestra que la ecuación $f(x)=x^7+2x^5+3x^3+4x+5$ tiene exactamente una raíz (sin hallarla).

15. Si la gráfica de la *derivada* de la función se así ¿en que puntos están los máximos y mínimos locales de la función?



La regla de L´hospital



Las derivadas pueden usarse para calcular algunos limites.
Digamos que queremos calcular el limite de un cociente $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$
pero que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ de modo que $\frac{f(a)}{g(a)}$ no está definido.
Para calcular $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ necesitamos ver como se comparan los valores de $f(x)$ y $g(x)$ para valores de x cercanos a a.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} f'(x) = r$ entonces cerca de a la función $f(x)$ se parece a ~~la función~~ lineal $l(x)=r(x-a)$.

Y si $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g'(x) = s$ entonces cerca de a la función $g(x)$ se parece a la función lineal $h(x)=s(x-a)$.

Así que cerca de a el cociente $\frac{f(a)}{g(a)}$ debe parecerse a $\frac{l(a)}{m(a)} = \frac{r(x-a)}{s(x-a)} = \frac{r}{s}$.
Esto es lo que dice el siguiente resultado, que también es cierto cuando $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty$.

Regla de L´Hospital. Supongamos que las funciones f y g están definidas y son derivables cerca de a (aunque quizá no en a) y que $\lim_{x \to a} f(x) = 0 = \lim_{x \to a} g(x)$ o que $\lim_{x \to a} f(x) = \infty = \lim_{x \to a} g(x)$
Entonces $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ siempre que este límite exista.

Demostración.

Ejemplo. Como $\lim_{x \to -2} x+2 = 0$ y $\lim_{x \to -2} x^2+3x+2 = 0$ entonces

$$\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{x^2+3x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{1}{2x+3} = -1$$

Ejemplo. Como $\lim_{x \to 0} \mathrm{sen}(x) = 0$ y $\lim_{x \to 0} x = 0$ entonces $\lim_{x \to o} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x} = \lim_{x \to o} \frac{\cos(x)}{1} = 1$

Al aplicar la regla de L´Hospital hay que tener cuidado que realmente $\lim_{x \to a} f(x) = 0 = \lim_{x \to a} g(x)$, si no los límites de $\frac{f(x)}{g(x)}$ y $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ no tienen que ser iguales.

Ejemplo: $\lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x^2+3x+2} = 3/6$ pero $\lim_{x \to 1} \frac{1}{2x+3} = 1/5$

La regla de L´Hospital se puede aplicar varias veces, mientras podamos seguir derivando y el cociente $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ no este definido.

Ejemplo. $\lim_{x \to o} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = \lim_{x \to o} \frac{-\mathrm{sen}(x)}{2x} = \lim_{x \to o} \frac{-\cos(x)}{2} = -\frac{1}{2}$

Problemas.

16. Calcula los siguientes límites.

a. $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3+6x^2+9x+4}$ b. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1}{x}$ c. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\log(x)}$

d. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2(x)}{\cos(x)-1}$ e. $\lim_{x\to \infty} \frac{\log(x)}{x}$ f. $\lim_{x\to 0} x\log(x)$

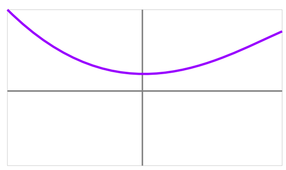
17. Muestra que para toda n, $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$ y $\lim_{x\to\infty} \frac{\log^n(x)}{x} = 0$

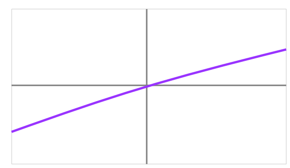
18. Da una idea de por que la regla de L´Hospital debería funcionar cuando $\lim_{x\to a} f(x) = \infty = \lim_{x\to a} g(x)$

Gráficas de funciones y sus derivadas

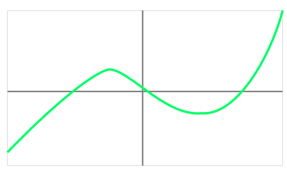
Si conocemos la gráfica de una función podemos estimar su derivada de manera geométrica y dibujar (aproximadamente) la gráfica de su derivada.

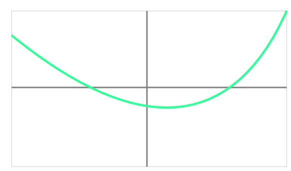
Ejemplos:
La función f(x) es decreciente cuando x<0 y creciente cuando x>0, así que su derivada es negativa para x<0 y positiva para x>0



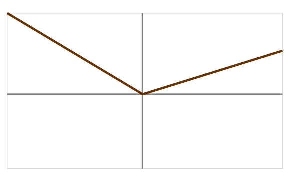


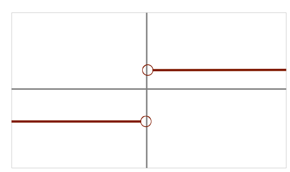
La derivada de g(x) es 0 en x=-1 y x=2, es negativa para x<-1, positiva para -1<x<2
y positiva para x<2. Y la derivada alcanza su valor mínimo en x=0



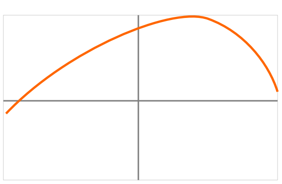


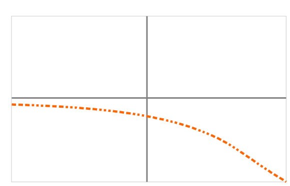
La derivada de h(x) negativa y constante para x<0 y es positiva y constante para x>0, en 0 la derivada no existe.

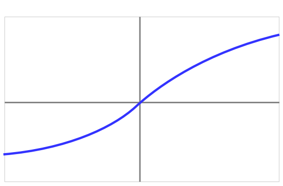


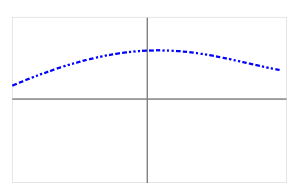


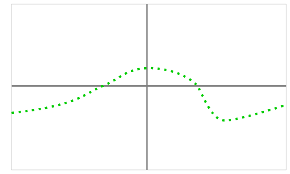
Ejercicios: Dibujar las gráficas de las derivadas a partir de las gráficas de las funciones

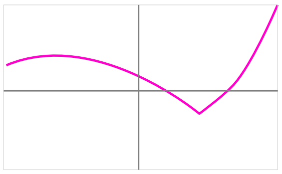


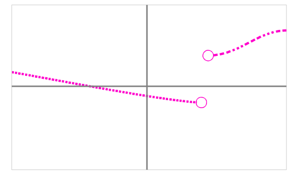






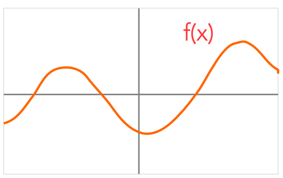


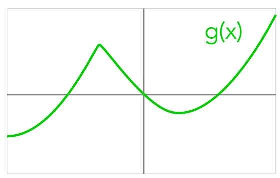




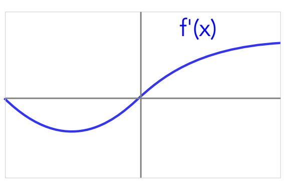
Problemas.

19. Esboza las gráficas de las derivadas de estas funciones

a. 

b. 

20. Encontrar gráficas de funciones cuyas derivadas se vean así
(ojo: se dan las derivadas y se piden las funciones)

a. 

b. 

Derivadas de orden superior

Ejemplo: Cuando un objeto cae su velocidad $v(t)$ va aumentando con el tiempo. A la razón de cambio de la la velocidad respecto al tiempo se le llama **aceleración**. La aceleración $a(t)$ es la derivada de la velocidad respecto al tiempo, y como la veñocidad es la derivada de la posición respecto al timepo, entonces la aceleración es la segunda derivada de la posición respecto al tiempo:

$$a(t) = v'(t) = p''(t)$$

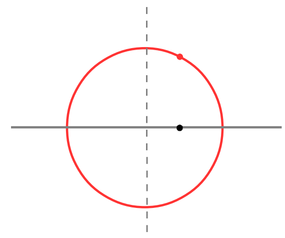
Lo que descubrió Newton fue que la aceleración de un objeto que cae durante poco tiempo es *casi* constante.
Si suponemos que es constante $a(t)=g$
Si suponemos que la aceleración es constante, digamos $a(t)=a$ entonces la velocidad $v(t)$ es una función cuya derivada es la constante g, así que $v(t)=at+c$ (ya que la derivada de la función at es a y todas las funciones con la misma derivada difieren por una constante).
Y si $v(t)=at+c$ entonces la posición $p(t)$ es una función cuya derivada es $v(t)=at+c$, así que $p(t)={}^a/_2t^2+ct+d$ (ya que la derivada de ${}^a/_2t^2+ct$ es ${}^a/_2t+c$ y todas las funciones con la misma derivada difieren por una constante).
Así que para saber la posición nos basta conocer la aceleración a y las constantes c y d.
¿y quienes son c y d? Pues $v(0)=a\cdot 0+c=c$ y $p(0)= {}^a/_2\cdot 0^2+c\cdot 0+d=d$ así que c es la *velocidad inicial* y d es la *posición inicial*.

La aceleración de un objeto que se mueve en línea recta no tiene que ser constante, pero podemos calcularla co mo la derivada de su velocidad, o como la segunda derivada de su posición. Y si conocemos la aceleración $a(t)$ de un objeto y podemos encontrar una función $v(t)$ cuya derivada sea $a(t)$ entonces su velocidad del objeto debe ser $v(t)+c$, y si podemos hallar una función $p(t)$ cuya derivada sea $v(t)$ entonces la posición del objeto debe ser $p(t)+ct+d$.

Ejemplo. Si un punto se mueve en una línea recta de modo que su posición en el instante t es $p(t)=t^3+2t^2+3t+4$ entonces la velocidad del punto en el instante t es $p'(t)=3t^2+4t+3$ y la aceleración del punto en el instante t es $p\hat{}(t)=6t+4$.

Ejemplo. Un punto se mueve en una línea recta y acelerando de acuerdo a la función $a(t)=\sqrt{t}=t^{1/2}$
Si la velocidad del punto en el instante 0 es 1 ¿cual es su velocidad en el instante t?
La velocidad $v(t)$ es una función cuya derivada es $a(t)=\sqrt{t}$ así que $v(t)={}^2/_3t^{3/2}+c$ y como $v(0)=1$ entonces $c=1$
Y si su posición en el instante 0 es 2 ¿cual es la posición en el instante t?
La posición $p(t)$ es una función cuya derivada es $v(t)={}^2/_3t^{3/2}+1$ así que $p(t)={}^4/_{15}t^{5/2}+t+d$ y como $p(0)=2$ entonces $d=2$

Ejercicio. Un punto gira alrededor de un círculo de radio 1 a velocidad constante 1 de modo que sus coordenadas en el instante t son $(\cos(t), \operatorname{sen}(t))$. ¿Cual es la velocidad de su sombra (en el eje x) en el instante t? ¿T cual es la aceleración de su sombra en el instante t?



Si una función $f(x)$ es derivable en en un intervalo su derivada $f'(x)$ es otra función, si esta función es derivable a su derivada la llamaremos la **segunda derivada** de $f(x)$ y la denotaremos por $f''(x)$. Y si $f''(x)$ es derivable a su derivada la llamaremos la **tercera derivada** de $f(x)$ y la denotaremos por $f'''(x)$. Etc.

Ejemplo. Si $f(x) = x^5+2x^4+3x^3+4x^2+5x+6$ entonces
$f'(x) = 5x^4+8x^3+9x^2+8x+5$
$f''(x) = 20x^3+24x^2+18x+8$
$f'''(x) = 60x^2+48x+18$
$f^{(4)}(x) = 120x+48$
$f^{(5)}(x) = 120$
$f^{(6)}(x) = 0$

Ejemplo. Si $f(x) = 1/x$ entonces
$f'(x) = -1/x^2$
$f''(x) = 2/x^3$
$f'''(x) = -6/x^4$
$f^{(4)}(x) = 24x^5$
$f^{(5)}(x) = -120/x^6$

Ejemplo. Si $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ entonces
$f'(x) = \cos(x)$
$f''(x) = -\operatorname{sen}(x)$
$f'''(x) = -\cos(x)$
$f^{(4)}(x) = \operatorname{sen}(x)$
y a partir de aquí las derivadas se repiten periódicamente

Ejercicios.

21. Calcula las primeras 3 derivadas de cada función

   a. $f(x) = \log(x)$

   b. $g(x) = e^{x^2}$

   c. $h(x) = \text{sen}(x)\cdot\cos(x)$

   d. $i(x) = \frac{1}{x^2+1}$

22. Encuentra todas las funciones que cumplen

   a. $f'(x) = x+1/x$

   b. $g'(x\ ) = \log(x)$

   c. $h''(x) = \text{sen}(x)$

   d. $i'''(x) = \sqrt{x}$

23. Encuentra funciones que cumplan

   a. $f'(x)=2f(x)$ b. $f''(x)=f(x)$ pero $f'(x)\neq f(x)$ c. $f(x)\ f'(x)=1$ d. $f'(x)=f^2(x)$

24. Encuentra una función cuya *segunda derivada* se vea asi: